2/11/17

Μονωνυμική Διάταξη στον $K[x_1,..,x_n]$

Π^n : το σύνολο των μονωνύμων

μερική διάταξη

i) Δεν ισχύει $x^a < x^a$, για οποιοδήποτε $x^a \in \Pi^n$

ii) Αν $x^{a_1} < x^{a_2}$ και $x^{a_2} < x^{a_3}$ $\Rightarrow$ $x^{a_1} < x^{a_3}$

ολική

iii) Αν $x^a, x^\beta \in \Pi^n$ τότε $x^a < x^\beta$ ή $x^a = x^\beta$ ή $x^a > x^\beta$

μονωνυμική διάταξη

iv) $1 < x^a$ αν $x^a \neq 1$

v) Αν $x^a < x^\beta$ $\Rightarrow$ και $\underbrace{x^a x^\gamma}_{x^{a+\gamma}} < x^\beta x^\gamma$

$< x^{\beta+\gamma}$

Η λεξικογραφική διάταξη είναι μονωνυμική με $x_1 > x_2 > \dots > x_n$

$x^a < x^\beta \Leftrightarrow$ $\alpha - \beta \neq 0$ και η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $\alpha - \beta$ είναι αρνητική

$\boxed{\text{ΑΠΟΔΕΙΞΗ}}$

(iii) $x^a, x^\beta \in \Pi^n$ Για $\alpha - \beta$:

i) $\alpha - \beta = (0, \dots, 0) \Rightarrow x^a = x^\beta$ αφού $\alpha = \beta$

ii) $\alpha \neq \beta$ $(\alpha - \beta \neq 0)$ $\Rightarrow$ $\alpha - \beta \neq (0, \dots, 0)$ κοιτάζω την πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη

iii) $\rightarrow$ Η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη να'ναι αρνητική $x^a < x^\beta$

→ Η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $\alpha-\beta$ να είναι θετική $x^{\alpha} > x^{\beta}$

iv) $x^{\alpha} \neq 1 = x^{(0,\dots)}$

$x^{\alpha} \in T^{n} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{N}_0^{n}$, $\alpha \neq (0,\dots,0) = 0$.

$\Rightarrow$ Η πρώτη (όλες δηλ.) μη μηδενική συντεταγμένη του $\alpha = \alpha - 0$ είναι θετική $\Rightarrow x^{\alpha} > 1$

v) $x^{\alpha} < x^{\beta} \overset{ορ16}{\Rightarrow}$ Η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $\alpha-\beta$ είναι αρνητική $\Rightarrow$ Η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $\underbrace{(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)}_{=\alpha-\beta}$ είναι αρνητική (το ίδιο διάνυσμα συγκρίνω)

Άρα $x^{\alpha+\gamma} < x^{\beta+\gamma} \Rightarrow x^{\alpha} x^{\gamma} < x^{\beta} x^{\gamma}$.

Άρα η λεξικογραφική είναι μονωνυμική διάταξη

<u>Θεώρημα</u>: Ένας δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether αν-ν κάθε αύξουσα ακολουθία ιδεωδών είναι τελικά σταθερή, δηλαδή $\forall$ ακολουθία ιδεωδών $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots$ υπάρχει φυσικός αριθμός N τω:

$$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \dots = I_{N+k} = \dots$$

αποδ)

(⇒) R δακτύλιος του Noether. Άρα οποιοδήποτε ιδεώδες
~~[illegible]~~ μιαν παρω αυτό θα έχει πεπερασμένο
πλήθος γεννητόρων

Παίρνω μια πεπερασμένη ακολουθία ιδεωδών
αύξουσα ακολουθία

Έστω $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1}$

Σύνολο (άπειρης ένωσης): $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

Η ένωση ιδεωδών δεν είναι ιδεώδες

$\boxed{I \text{ ιδεώδες}}$: (i) μη κενό $\quad 0 \in I_1 \Rightarrow 0 \in I = \bigcup I_i$

θδο η διαφορά 2 στοιχείων του I είναι στοιχείο του I

Έστω $a, \beta \in I$ θδο $a-\beta \in I$ (ii)

$a \in I = \bigcup I_i \Rightarrow a \in I_\kappa \quad \kappa > \lambda$ ή $\lambda > \kappa$
$b \in I = \bigcup I_i \Rightarrow \beta \in I_\lambda$

Έστω $\kappa \le \lambda$ (χβγ)
$a \in I_\kappa \subseteq I_{\kappa+1} \subseteq \dots \subseteq I_\lambda \Rightarrow a \in I_\lambda$
$\beta \in I_\lambda$

άρα I_λ ιδεώδες $\Rightarrow a-\beta \in I_\lambda \Rightarrow$
$a-\beta \in I = \bigcup I_i$

(iii) $r \in R$, $a \in I \Rightarrow a \in I_\kappa \Rightarrow r \cdot a \in I_\kappa \subseteq I$
$\Rightarrow ra \in I$

I ιδεωδες R δακτυλιος της Noether $\Rightarrow$
$I = \langle f_1, f_2, .., f_s \rangle$

$f_1 \in I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow f_1 \in I_{n_1}$

$f_2 \in I = \bigcup I_i \Rightarrow f_2 \in I_{n_2}$

$\vdots$

$f_s \in I = \bigcup I_i \Rightarrow f_s \in I_{n_s}$

$\left.\right\} N = \max\{n_1, n_2, .., n_s\}$

θδο καποια στιγμη η ακολουθια αυτη σταθεροποιειται

ολα τα μεγαλυτερα.

$f_1 \in I_{n_1} \subseteq I_{n_1+1} \subseteq .. \subseteq I_N$

$f_2 \in I_{n_2} \subseteq I_{n_2+1} \subseteq ... \subseteq I_N$

$f_s \in I_{n_s} \subseteq I_{n_s+1} \subseteq ... \subseteq I_N$

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_N \subseteq I_{N+1} \subseteq I_{N+2} \subseteq ...$
$\subseteq I = \underbrace{\langle f_1, f_2, .., f_s \rangle}_{\text{οι γεννητορες του } I \text{ ειναι μεσα στο } I_n} \subseteq I_N$

αρα το ιδεωδες I ειναι μεσα στο I_n

$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = ... = I$ αρα τελικα σταθερη

($\Leftarrow$) Εστω οτι καθε αυξουσα ακολουθια ιδεωδων του R ειναι τελικα σταθερη
θδο R δακτυλιος της Noether.
(Προς απαγωγη) Εστω I ιδεωδες του R που δεν ειναι πεπερασμενα παραγομενο

$I \neq 0$ (οπως καθε ιδεωδες) αρα μπορω να βρω ενα στοιχειο στο I $\exists\, f_1 \in I$

$I \neq \langle f_1 \rangle$ αρα μπορω να βρω 1 στοιχειο του I που δεν ανηκει στο $\langle f_1 \rangle$

$\langle f_1 \rangle \subsetneq I \Rightarrow \exists\, f_2 \in I$ και $f_2 \notin \langle f_1 \rangle$

$\langle f_1, f_2 \rangle \subsetneq I \Rightarrow \exists\, f_3 \in I$ και $f_3 \notin \langle f_1, f_2 \rangle$

$\vdots$

$\langle f_1, f_2, \dots, f_{n-1} \rangle \subsetneq I$ (αν ηταν ισο θα ηταν το I πεπερασμενα

$\Rightarrow \exists\, f_n \in I$ και $f_n \notin \langle f_1, \dots, f_{n-1} \rangle$ παραγομενο πραγμα αδυνατο απο υποθεση

$\langle f_1 \rangle \subsetneq \langle f_1, f_2 \rangle \subsetneq \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \dots$

$\subsetneq \langle f_1, \dots, f_{n-1} \rangle \subsetneq \langle f_1, \dots, f_n \rangle$

Η ακολουθια αυτη δε γινεται ποτε σταθερη $\Rightarrow$ καταληξα σε ατοπο

Αρα: καθε ιδεωδες I ειναι πεπερασμενα παραγομενο $\Rightarrow$ R: δακτυλιος της Noether

Προταση: Εστω < μια μονωνυμικη διαταξη στον $K[x_1,\dots,x_n]$ και $x^a, x^\beta \in \Pi^n$. Αν x^a / x^β τοτε $x^a \le x^\beta$ (ισχυει για ολες τις διαταξεις)

αποδ|

$x^a / x^\beta \Rightarrow x^\beta = x^a x^\gamma$, για καποιο μονωνυμο $x^\gamma \in \Pi^n$

$1 \le x^\gamma \Rightarrow x^a 1 \le x^a x^\gamma \Rightarrow x^a \le x^\beta$

Θεωρημα: Καθε μονωνυμικη διαταξη ειναι καλα διατεταγμενη, δηλαδη οποιοδηποτε μη κενο υποσυνολο του Π^n εχει ελαχιστο στοιχειο

αποδ|

Εστω $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq \Pi^n$ και A δεν εχει ελαχιστο στοιχειο (προς απαγωγη)

$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ x^{a_1} \in A$. Το x^a δεν ειναι ελαχιστο του A. Αρα, υπαρχει $x^{a_2} < x^{a_1}$. Το x^{a_2} δεν ειναι ελαχιστο στοιχειο του A αρα, υπαρχει $x^{a_3} < x^{a_2}$

⋮

$x^{a_1} > x^{a_2} > x^{a_3} \dots > x^{a_N} > x^{a_{N+1}}$

$\langle x^{a_1} \rangle \subseteq \langle x^{a_1}, x^{a_2} \rangle \subseteq \langle x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3} \rangle \subseteq \dots$
$\subseteq \langle x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_N} \rangle \subseteq \langle x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_{N+1}} \rangle$

$K[x_1,\dots,x_n]$ δακτυλιος της Noether Αρα η παραπανω αυξουσα ακολουθια ιδεωδων ειναι τελικα σταθερη: $I_N = I_{N+1} = \dots$

$\langle x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_N} \rangle = \langle x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_N}, x^{a_{N+1}} \rangle$

$x^{a_{N+1}} \in \langle x^{a_1}, \dots, x^{a_N} \rangle$

$$x^{a_{N+1}} = f_1 x^{a_1} + f_2 x^{a_2} + \underset{\uparrow \atop f_s x^{a_s}}{\dots} + f_N x^{a_N}$$

$$x^{a_s} \mid x^{a_{N+1}} \Rightarrow x^{a_s} \le x^{a_{N+1}}$$

$$x^{a_1} > x^{a_2} > \dots > x^{a_s} > x^{a_N} > x^{a_{N+1}}$$

$$\boxed{x^{a_s} > x^{a_{N+1}}}$$ ατοπο

Αρα καθε μη κενο συνολο A υποσυνολο του Π^n εχει ελαχιστο στοιχειο

$K[x_1, \dots, x_n] \ni f$

$f \neq 0$ $>$ μονωνυμικη διαταξη

$f = c_1 x^{a_1} + c_2 x^{a_2} + \dots + c_s x^{a_s}$, $x^{a_i} \in \Pi^n$

$c_i \in K$

$c_i \neq 0$

$$x^{a_1} > x^{a_2} > \dots > x^{a_s}$$

$lt(f) = c_1 x^{a_1}$: αρχικος ορος

$lc(f) = c_1$: αρχικος συντελεστης

$lm(f) = x^{a_1}$: αρχικο μονωνυμο

$$\boxed{lt(f) = c_1 x^{a_1} = lc(f)\, lm(f)}$$

Παραδειγματα:

$R[x,y]$

$$f = 3x^3y + 2xy - 7y^2$$

Δε το γραφω ετσι ποτε: $\cancel{f = 4x^3y - x^3y + 2xy - 7y^2}$

ή $\cancel{f = 5x^7y^3 + 3x^3y + 2xy - 7y^2 - 5x^7y^3}$

lex : $x > y$

Το πολυωνυμο ειναι διατεταγμενο (τα πιο πολλα x ειναι στην αρχη)

$lt(f) = 3x^3y$

deglex: $y > x$ (οσο πιο πολλα y εχει τοσο πιο μεγαλο)

$f = 3x^3y - 7y^2 + 2xy$ $\quad lt(f) = -7y^2$;

$\rightarrow f = 3x^3y + 2xy - 7y^2$ lex : $y > x$

$lt(f) = -7y^2$

$f = -7y^2 + 3x^3y + 2xy$

$\rightarrow f = 3x^3y + 2xy - 7y^2$

$lt(f) = 2xy$ ~~deg lex~~

$xy \mid x^3y$ και $xy \neq x^3y$ με
$xy < x^3y$

Αρα ~~2~~ μονωνυμικη διαταξη των $y > x$
$\Downarrow$
$lt(f) = 2xy$

$$\rightarrow g = \underbrace{3x^7y^2}_{deg\ 9} \underbrace{- 7xyz}_{deg = 3} + \underbrace{5z^2}_{deg = 2}$$

$lt(g) = 3x^7y^2$ deglex
$x > y > z$

Ειναι ηδη διαταγμενο

Τωρα $lt(g) = 5z^2$ $>_{lex}$ $z > x > y$

$$g = 5z^2 - 7xyz + 3x^7y^2$$

$lt(g) = -7xyz$

Εστω μονωνυμικη διαταξη $<$ τ.ω:

$lt(g) = -7xyz \Rightarrow$

$xyz > x^7y^2$ και $xyz > z^2$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$z > x^6y$ $xy > z$

$\Rightarrow xy > z > x^6y \Rightarrow xy > x^6y \Rightarrow$

$xy \nmid x^6y \Rightarrow xy < x^6y$ ΑΤΟΠΟ

Αρα $\nexists$ καμια διαταξη που το xyz ειναι το πιο μεγαλο

διαιρετεος, διαιρετης, μερικο υπολοιπο

<u>Ορισμος</u>: Εστω $f, g, h \in K[x_1, \dots, x_n]$ με $g \neq 0$. Θα λεμε οτι το f αναγεται στο h μοδιο g σε ενα βημα και θα το συμβολιζουμε $f \xrightarrow{g} h$ αν-ν:

i) Το αρχικο μονωνυμο $lm(g)$ διαιρει ενα μη μηδενικο ορο X του f (και

ii) Το $h = f - \frac{X}{lt(g)} g$, X: όρος του f.

Παραδειγματα:

$\mathbb{Q}[x,y,z]$ $\quad \text{lex}_{z>y>x}$

$f = 5z^3 + 7xz^2 - 3y^2 \quad , \quad g = 3z^2 - y^3 + yx$

$X = 5z^3$

∘ $f \xrightarrow{g} h = f - \frac{X}{lt(g)} g = 5z^3 + 7xz^2 -$

$-3y^2 - \frac{5z^3}{3z^2}(3z^2 - y^3 + yx) =$

$= 5z^3 + 7xz^2 - 3y^2 - \frac{5}{3}z(3z^2 - y^3 + yx) =$

$= \cancel{5z^3} + 7xz^2 - 3y^2 - \cancel{5z^3} + \frac{5}{3}y^3 z -$

$- \frac{5}{3}xyz = 7xz^2 + \frac{5}{3}y^3 z - \frac{5}{3}xyz - 3y^2$

lex
z>y>x
αρα κοιταμε
τα πιο μεγαλα
z, μετα y

$X = 7xz^2$

∘ $f \xrightarrow{g} h = f - \frac{X}{lt(g)} g =$

$= 5z^3 + 7xz^2 - 3y^2 - \frac{7xz^2}{3z^2}(3z^2 - y^3 + yx)$

$K[x_1, \ldots, x_n]$ ← μονωνυμική διάταξη

Ορισμος: Εστω $f, h, g_1, g_2, \ldots, g_s$ πολυώνυμα του $K[x_1, \ldots, x_n]$ με $g_i \neq 0$, $1 \leq i \leq s$ και $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$. Θα λέμε ότι το f ανάγεται στο h μόδιο G και θα γράφαμε $f \xrightarrow{G} h$ αν-ν $\exists$ δείκτες $i_1, i_2, \ldots, i_t$ τω $1 \leq i_j \leq s$ και πολυώνυμα $h_1, h_2, \ldots, h_{t-1}$ έτσι ώστε

$$f \xrightarrow{g_{i_1}} h_1 \xrightarrow{g_{i_2}} h_2 \rightarrow \cdots \xrightarrow{g_{i_{t-1}}} h_{t-1} \xrightarrow{g_{i_t}} h$$